A38 O1 ma4 GK-Math - Protokoll vom Mi., den 23.9.2009

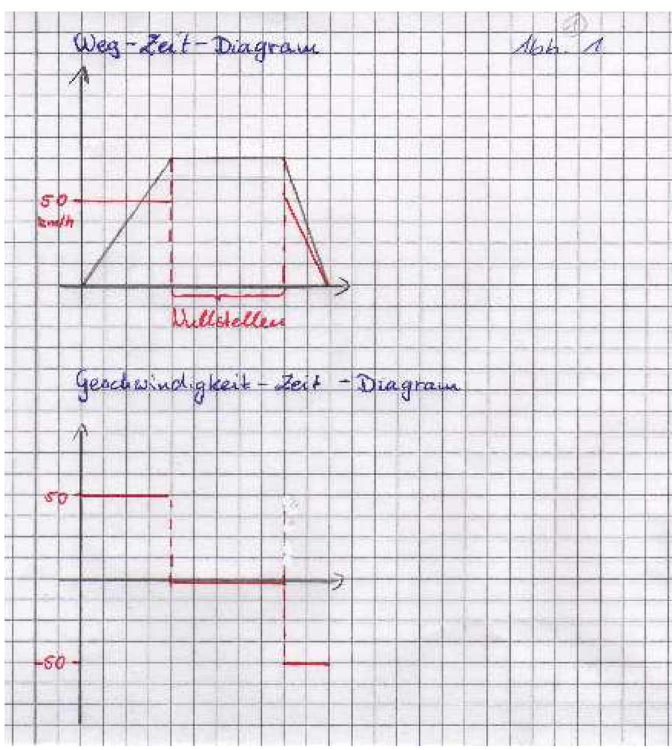
Protokollantin: Wioletta Lazik , Kursleiter: Herr Manthey

Themen der Stunde

1. **Grafische „Geschwindigkeitsbestimmung“**
2. **Kontrolle der Hausaufgabe**
3. **Konkrete Berechnung der Momentangeschwindigkeit aus Durchschnittsgeschwindigkeiten (Hausaufgabe zum Snowbordern, S.186, Nr 4)**

1. Grafische „Geschwindigkeitsbestimmung“

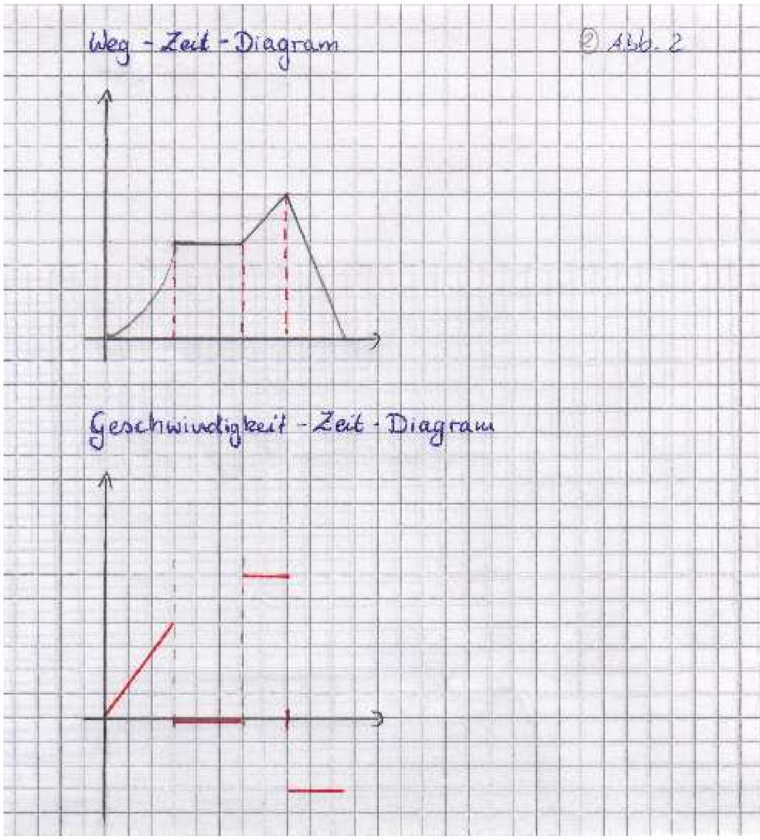
Am Anfang der Stunde machten wir verschiedene Übungen zur grafischen „Geschwindigkeits-bestimmung“. Unser erstes Diagram nennt sich „Weg-Zeit-Diagram“. In diesem Diagram legen wir die



Punkte, bzw. das Intervall fest, in dem die Geschwindigkeit offensichtlich null ist, weil der Abstand sich nicht ändert (S-Bahn steht auf Bahnhof). Danach zeichneten wir das zugehörige „Geschwindigkeit-Zeit-Diagram“ . In einem Beispiel möchte ich die Einzelheiten verdeutlichen.

Wenn der Fahrer (von uns aus) mit einer konstanten Geschwindigkeit (50 km/h) los fährt, ist das eine positive Geschwindigkeit. Wenn der Fahrer aber wendet und zurück fährt, bezeichnen wir diese Geschwindigkeit als eine negative Geschwindigkeit. Das liegt daran, dass die Entfernung (zu uns) wieder abnimmt. Siehe Abbildung 1 und 2.

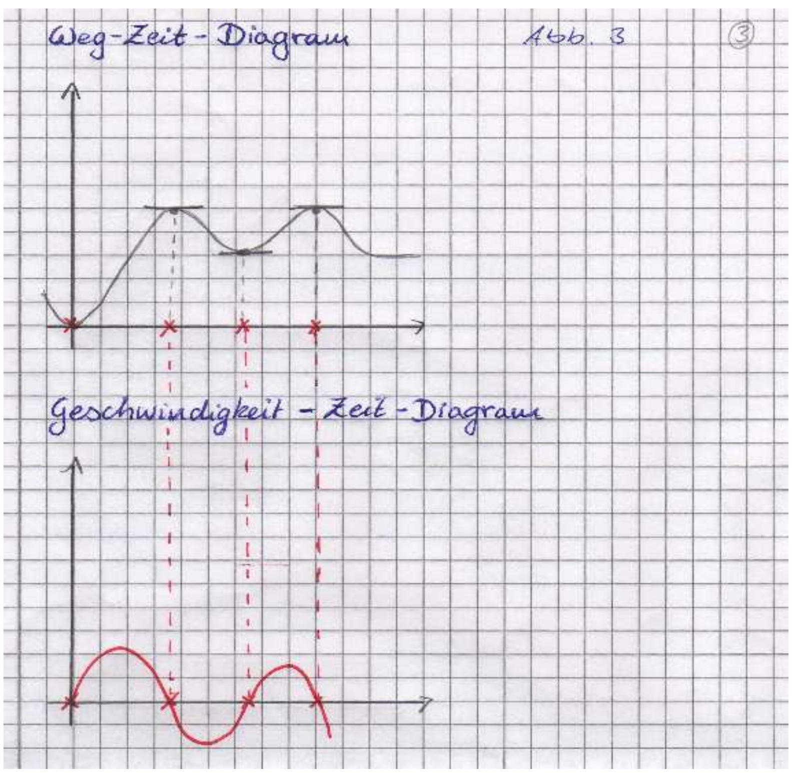
Das „Geschwindigkeit-Zeit-Diagram“ ist die **Ableitung** von dem „Weg-Zeit-Diagram“



Auch hier in Abbildung 2 ist eine negative Geschwindigkeit vorhanden, da der Fahrer wendet und zurück fährt.

In der 3. Abbildung finden wir ein Polynom vor. Die Höhepunkte und Tiefpunkte gelten hier als unsere Nullstellen. Wenn wir eine Tangente anlegen, liegt diese gerade auf.

Nach den grafischen Übungen besprachen wir Probleme bei den Hausaufgaben (S. 186 Nr.4).



2. Kontrolle der Hausaufgabe

Gegegeben:

Ein Snowboard rutscht einen Hand hinunter und bewegt sich nach der Formel $s(t)=1{,}5\ t^2$.

Was bedeutet das überhaup das t und wie kommt man auf die Zahlen?

- s(t), also "s von t", bedeutet "Strecke nach sounsoviel Sekunden". Das "soundsoviel" wird in Mathe meist mit "x" ausgedrückt, in der Physik aber mit "t" für "time", denn es geht meist um Sachen die zeitabhängig sind.
- 1,5 t^2 (t zum Quadrat) ist die Berechnungsformel für die zurückgelegte Strecke nach t Sekunden. Eigentlich müsste man die Masseinheiten dazu schreiben: 1,5 m/sek/sek mal t sek mal t sek. 1,5 Meter pro Sekunde pro Sekunde ist die Beschleunigung und t ist die vergangene Zeit. Sinn: Beschleunigung mal Zeit ergibt die Geschwindigkeit. Und Geschwindigkeit mal Zeit gibt den Weg. Also ist Beschleunigung mal Zeit mal Zeit der Weg.

Ja, aber wieso 1,5?

Aus Messungen wissen wir, dass beim Freien Fall $5*t^2$ für den Weg gilt. Fällt ein Snowborder frei? Nein, er rutscht. Also muss er langsamer als im Freien Fall sein. Deshalb 1.5!

Aufgabe a: Welchen Weg hat das Snowboard nach 1 Sekunden und nach 5 Sekunden zurückgelegt?

Formel:	$s(t)= 1{,}5 * t^2$	[m/s/s * s*s]
Anwendung:	$s(1) = 1{,}5 * 1^2= 1{,}5$ m	
	$s(5) = 1{,}5 \times 5^2 = 1{,}5 \times 25 = 37{,}5$ m	

Antwort: Nach 1 Sekunde hat das Snowboard 1,5 m zurückgelegt und nach 5 Sekunden hat das Snowboard 37,5 m zurückgelegt.

Aufgabe b: Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 5 Sekunden der Fahrt?

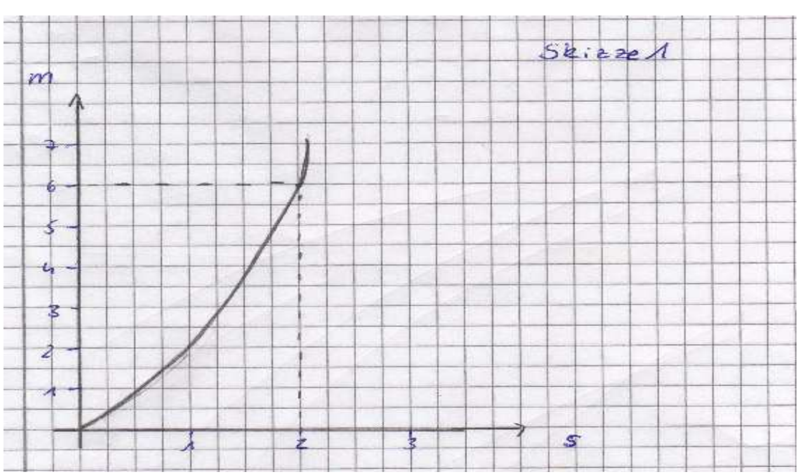
Ansatz: Mittlere Geschwindigkeit ist zu berechnen aus zurückgelegtem Weg durch die dafür aufgewendete Zeit.

Lösung: 37,5 m / 5 s = 7,5 m/s

Antwort: Die mittlere Geschwindigkeit beträgt in den ersten 5 Sekunden 7,5 m/s , d.h. 27 km/h.

3. Konkrete Berechnung der Momentangeschwindigkeit aus Durchschnittsgeschwindigk.

Frage: Wie hoch ist die Momentangeschwindigkeit nach 2 sec?



Um die Momentangeschwindigkeit ermitteln zu können, müssen wir erst in mehreren Schritten Durschnittsgeschwindigkeiten errechnen. Diese Schritte geben uns später Aufschluss über die Ermittlung der Momentangeschwindigkeit. Wir berechen jetzt unsere Durschnittsgeschwindigkeit und dafür brauchen wir den Weg (hier: Meter) und die Zeit (hier: Sekunde). Die Meter müssen wir mit unserer Formel „s(t) = 1,5 * t²“ in eine Zwischenrechnung (ZWR) einbringen.

Schritt 1: Durschnittsgeschwindigkeit in den ersten beiden Sekunden

$$\frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 0}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3\,\frac{m}{s}$$

Schritt 2: Durschnittsgeschwindigkeit in der zweiten Sekunde, also im Intervall 1. bis 2. Sekunde:

$$\frac{s(2) - s(0)}{2 - 1} = \frac{6 - 1{,}5}{1} = \frac{4{,}5}{1} = 4{,}5\,\frac{m}{s}$$

Schritt 3: Durschnittsgeschwindigkeit in der halben Sekunde vor 2, also im Intervall 1,5 – 2 s:

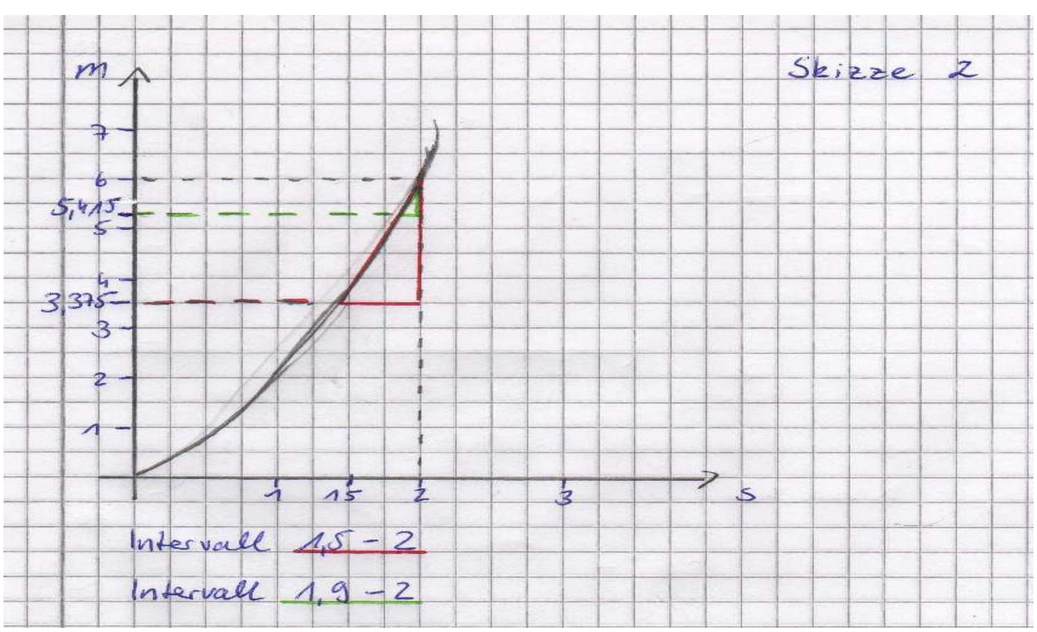
ZWR: << $s(1{,}5) = 1{,}5 \times (1{,}5)^2$
$= 1{,}5 \times 2{,}25 = 3{,}375$ m/s >>

$$\frac{s(2) - s(1{,}5)}{2 - 1{,}5} = \frac{6 - 3{,}375}{0{,}5} = \frac{2{,}625}{0{,}5} = \frac{5{,}25}{1} = 5{,}25\,\frac{m}{s}$$

Schritt 4: Durchschnittsgeschwindigkeit in der letzten Zehntelsekunde:

ZWR: << $s(1{,}9) = 1{,}5 \times (1{,}9)^2$
$= 1{,}5 \times 3{,}61 = 5{,}415$ m/s >>

$$\frac{s(2) - s(1{,}9)}{2 - 1{,}9} = \frac{6 - 5{,}415}{0{,}1} = \frac{0{,}585}{0{,}1} = 5{,}85\,\frac{m}{s}$$



Schritt 5: Durchschnittsgeschwindigkeit in der letzten Hundertstelsekunde:

ZWR: << $s(1{,}99) = 1{,}5 \times (1{,}99)^2$
$= 1{,}5 \times 3{,}9601 = 5{,}94015$ m/s >>

$$\frac{s(2) - s(1{,}99)}{2 - 1{,}99} = \frac{6 - 5{,}94015}{0{,}01} = \frac{0{,}05985}{0{,}01} = 5{,}985\ \frac{m}{s}$$

Nach unseren Beobachtungen, bei diesen Rechenschritten, können wir eins sicher festhalten: **Wir errechnen die Momentangeschwindigkeit mit Hilfe der Durchschnitts-geschwindigkeiten in der Nähe.**

„Je kleiner der Intervallabstand zum Zeitpunkt, desto genauer entspricht die Durchschnittsgeschwindigkeit der Momentangeschwindigkeit!“

Wir hätten also auch schon mit den letzten zwei Schritten (Zehntelsekunde und Hundertstelsekunde) beginnen können.

Dieses Verfahren nennt man auch **Grenzwertbildung** oder **Limesbildung**.

Um das Ganze zu verdeutlichen werde ich noch drei weitere Rechnungen machen. Diese sollen den „Spielraum“ für die Momentangeschwindigkeit nochmals eingrenzen.

Schritt 6: Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall 2,5 – 2:

ZWR: << $s(2{,}5) = 1{,}5 * (2{,}5)^2$
$= 1{,}5 * 6{,}25 = 9{,}375$ m/s >>

$$\frac{s(2{,}5) - s(2)}{2{,}5 - 2} = \frac{9{,}375 - 6}{0{,}5} = \frac{3{,}375}{0{,}5} = 6{,}75\ \frac{m}{s}$$

Schritt 7: Durchschnittsgeschwindigkeit in der letzten Zehntelsekunde:

ZWR:<< $s(2{,}1) = 1{,}5 * (2{,}1)^2$
$= 1{,}5 * 4{,}41 = 6{,}615$ m/s >>

$$\frac{s(2{,}1) - s(2)}{2{,}1 - 2} = \frac{6{,}615 - 6}{0{,}1} = \frac{0{,}615}{0{,}1} = 6{,}15\ \frac{m}{s}$$

Schritt 8: Durchschnittsgeschwindigkeit in der letzten Hundertstelsekunde:

ZWR:<< $s(2{,}01) = 1{,}5 * (2{,}01)^2$

$= 1{,}5 * 4{,}0401 = 6{,}06015$ m/s >>

$$\frac{s(2{,}01) - s(2)}{2{,}01 - 2} = \frac{6{,}06015 - 6}{0{,}01} = \frac{0{,}06015}{0{,}01} = 6{,}015\,\frac{m}{s}$$

Ergebnis:

Wenn wir Schritt 5 und Schritt 8 nun miteinander vergleichen, sehen wir wie klein die **Differenz** zwischen **5,985 m/s** und **6,015 m/s** geworden ist. In diesem Intervall liegt unsere Momentangeschwindigkeit.

Wir können also vermuten, dass die **Momentangeschwindigkeit 6 m/s sein wird!**

Beweisen können wir dass durch diese Rechnungen noch nicht. Nach diesen Rechnungen könnte die Momentangeschwindigkeit z.B. auch 6,01 m/s sein. Die Gewissheit erlangen wir erst, wenn wir den Berechnungsprozess verallgemeinern, von den konkreten, aber willkürlichen, Zahlen lösen und damit zur Einsicht kommen, dass 6 m/s richtig sein **muss** und nicht nur geraten ist.

Hausaufgaben zu Dienstag, den 29.9.09

- S.186 Nr. 4 fertigstellen, wenn noch nicht getan

- S. 186 Nr. 3 und 6 lösen