#1: Mathe A38 Q1 Gruppe (Dr. Frisch) Protokoll vom 1.10.2009

#2: Protokollant: Vertretungslehrer Manthey

#3: ------------------------------

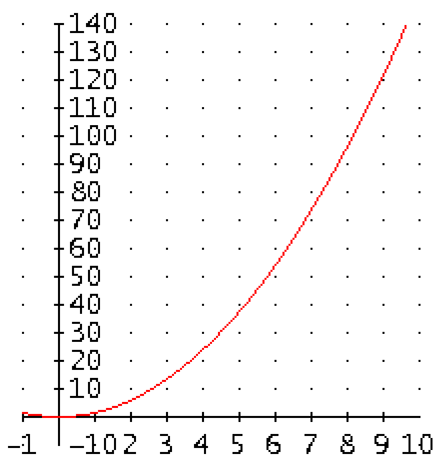
#4: Gegeben war ursprünglich die Weg–Zeit–Funktion eines Snowboarders:

#5: $s(t) := 1.5 \cdot t^2$

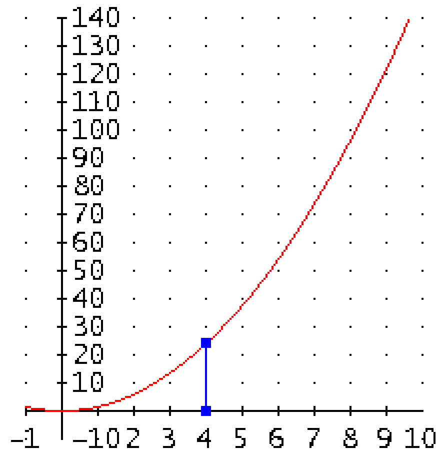
#6: 1.5 ist die Beschleunigung, gemessen in m/sec/sec und t^2 wird gemessen in sec*sec.

#7: Das Ergebnis gibt die zurückgelegten Meter nach soundsoviel Sekunden an. Wertetabelle:

#8: $$\left[\begin{bmatrix} \text{Zeit t} \\ \text{Weg s(t)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 13.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 37.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 54 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 73.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 96 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 121.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 150 \end{bmatrix}\right]$$

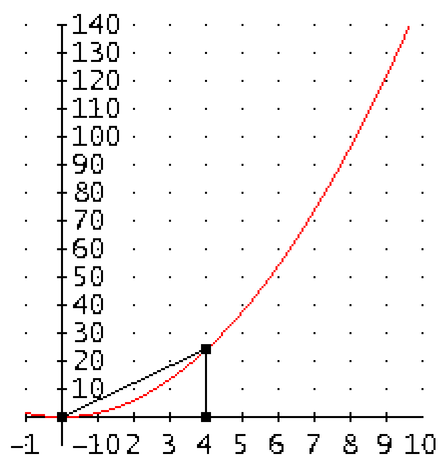


#9: Wir wollen die Geschwindigkeit des Snowboarders nach genau 4 sec Fahrt bestimmen.



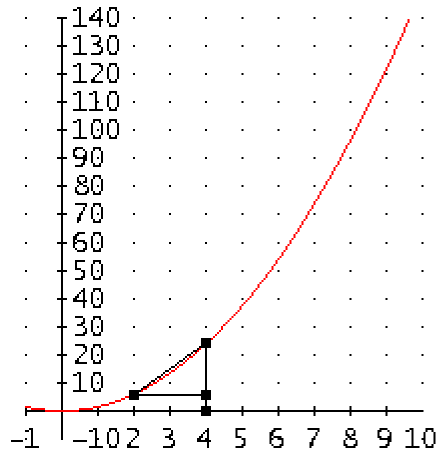
#10: Die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten vier Sekunden Fahrt ist 6 m/s:

#11: $$\frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} = \frac{24 - 0}{4 - 0} = \frac{24}{4} = 6$$



#12: Die Durchschnittsgeschwindigkeit in der zweiten bis vierten Sekunde ist 10 m/s:

#13: $$\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 6}{4 - 2} = \frac{20}{2} = 10$$



#14: Die Durchschnittsgeschwindigkeit in der dritten bis vierten Sekunde ist

10,5 m/s:

#15: $$\frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{24 - 13.5}{4 - 3} = 10.5$$

#16: Die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall 3,5 sec bis 4 sec ist

11,25 m/s:

#17: $$\frac{s(4) - s(3.5)}{4 - 3.5} = \frac{24 - 18.375}{0.5} = 11.25$$

#18: Die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall 3,99 sec bis 4 sec ist

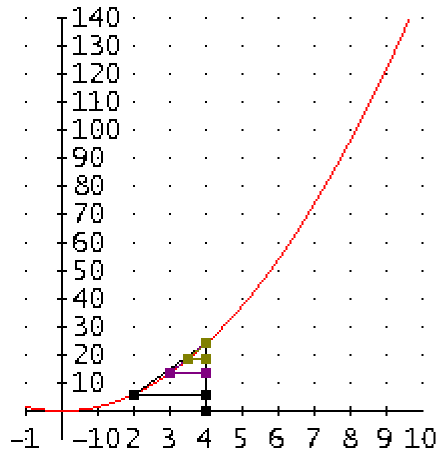
11,985 m/s:

#19: $$\frac{s(4) - s(3.99)}{4 - 3.99} = \frac{24 - 23.88015}{0.01} = 11.985$$

#20: Die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall 4 sec bis 4.01 sec ist

12,015 m/s:

#21: $$\frac{s(4) - s(4.01)}{4 - 4.01} = \frac{24 - 24.12015}{4 - 4.01} = 12.015$$



#22: Überblick:

#23: $$\left[\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\7.5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\10.5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3.5\\11.25\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3.9\\11.85\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\?\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4.1\\12.15\end{bmatrix}\right]$$

#24: Die Durchschnittsgeschwindigkeit im ZeitPUNKT 4. Sekunde können wir auf diese Weise nicht berechnen, denn:

#25: $$\frac{s(4) - s(4)}{4 - 4} = \frac{0}{0} = ????$$

#26: Aber wie man oben sieht, laufen die Werte der Durchschnittsgeschwindigkeiten auf 12 m/s zu.

#27: Deshalb sagen wir: Die Momentangeschwindigkeit nach exakt 4 sec Fahrt ist 12 m/s.

Mit der Annäherungsmethode mittels Durchschnittsgeschwindigkeiten vor und nach dem Zeitpunkt kann man bei jeder beliebigen Weg-Zeit-Funktion die Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt bestimmen. Das wäre auf Dauer natürlich sehr mühsam, wenn man bei jedem neuen Zeitpunkt diese Näherungsrechnung machen wollte. Deshalb verallgemeinern wir das Rechenverfahren schrittweise. Zuerst lösen wir uns von der Vorgabe <<4 sec>> beim Snowboarder. Wie sieht es nach 1,2,3,...x Sekunden aus?

Dazu betrachten wir einen beliebigen Zeitpunkt, den nennen wir z.B. to und führen die gleiche Rechnung noch einmal aus:

#28: $$\frac{s(to + h) - s(to)}{to + h - to} = \frac{1.5\cdot(to + h)^2 - 1.5\cdot to^2}{h} =$$

$$\frac{1.5\cdot(to^2 + 2\cdot to\cdot h + h^2) - 1.5\cdot to^2}{h}$$

#29: $\frac{1.5\cdot to^2 + 1.5\cdot 2\cdot to\cdot h + 1.5\cdot h^2 - 1.5\cdot to^2}{h} = \frac{1.5\cdot 2\cdot to\cdot h + 1.5\cdot h^2}{h} =$

$1.5\cdot 2\cdot to + 1.5\cdot h$

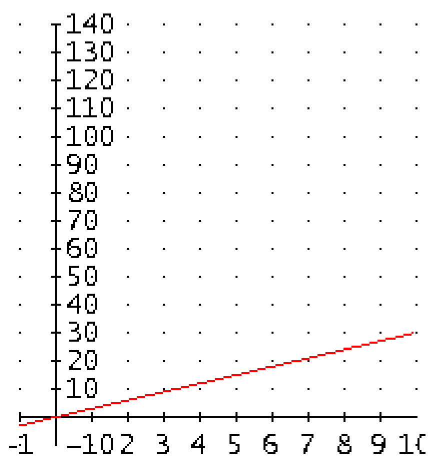
Wenn jetzt h immer kleiner wird, dann wird 1.5*h auch immer kleiner, geht gegen null.
Und 1.5*2*to bleibt übrig.

#30: $\lim_{h\to 0} (1.5\cdot 2\cdot to + 1.5\cdot h) = 1.5\cdot 2\cdot to$

Das bedeutet:
Die Momentangeschwindigkeit nach 1 Sekunde ist 1.5*2*1 = 3 m/s.
Die Momentangeschwindigkeit nach 2 Sekunden ist 1.5*2*2 = 6 m/s.
Die Momentangeschwindigkeit nach 3 Sekunden ist 1.5*2*3 = 9 m/s.
Die Momentangeschwindigkeit nach 4 Sekunden ist 1.5*2*4 = 12 m/s. Usw. usw.

#31: Die Kurve, welche die Momentangeschw. angibt ist also:

#32: $mv(t) := 1.5\cdot 2\cdot t$



Wenn man das mit x anstelle von t schreibt, ergibt sich, dass zu f(x) = 1.5*x^2 die Ableitung f'(x)=1.5*2*x gehört,
welche die Tangentensteigung des Graphen von f angibt.

Wir sagen:
Die Ableitung einer Funktion an der Stelle xo ist der Grenzwert der Sekantensteigungen. Geometrisch ist das die Steigung der Tangente im betrachteten Punkt. Physikalisch entspricht das der Momentangeschwindigkeit.

Nun gibt es aber auch andere Funktionen als 1.5 * x^2. Wie ist es denn bei 7*x^3 oder 4*x^5 usw.?
In der Tat gibt es zu jeder Funktion, die durch eine Formel gegeben ist, auch eine Formel für die Ableitung.
Dies soll jetzt am Beispiel x^3 vorgeführt werden.

#33: Es sei x^3 gegeben mit einer beliebigen Zahl c davor:

#34: $f(x) := c \cdot x^3$

#35: Wir berechnen den Differenzenquotienten, die Sekantensteigung:

#36: $$\frac{f(xo + h) - f(xo)}{xo + h - xo} = \frac{c \cdot (xo + h)^3 - c \cdot xo^3}{h}$$

#37: $$\frac{c \cdot (h^3 + 3 \cdot h^2 \cdot xo + 3 \cdot h \cdot xo^2 + xo^3) - c \cdot xo^3}{h}$$

#38: $$\frac{c \cdot h^3 + 3 \cdot c \cdot h^2 \cdot xo + 3 \cdot c \cdot h \cdot xo^2 + c \cdot xo^3 - c \cdot xo^3}{h}$$

#39: $c \cdot h^2 + 3 \cdot c \cdot h \cdot xo + 3 \cdot c \cdot xo^2$

#40: Wenn h gegen null geht, gehen c*h^2 und 3*c*h*xo auch gegen null.

3*c*xo^2 bleibt übrig.

#41: $$\lim_{h \to 0} (c \cdot h^2 + 3 \cdot c \cdot h \cdot xo + 3 \cdot c \cdot xo^2) = 3 \cdot c \cdot xo^2$$

Das bedeutet, dass die Ableitung von c*x^3 die Funktion c*3*x^2 ist.

Wir beobachten, dass die Ableitung hier immer eine Potenz weniger ist und dass die Konstante erhalten bleibt.

Das gibt Anlass zu folgender Formelsammlung:

#42: $$\begin{bmatrix} f(x) = c \cdot x^4 & f'(x) = c \cdot 4 \cdot x^3 \\ f(x) = c \cdot x^3 & f'(x) = c \cdot 3 \cdot x^2 \\ f(x) = c \cdot x^2 & f'(x) = c \cdot 2 \cdot x^1 \\ f(x) = c \cdot x^1 & f'(x) = c \cdot 1 \cdot x^0 = c \\ f(x) = c \cdot x^0 = c & f'(x) = c \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0 \end{bmatrix}$$

Noch einmal verallgemeinert mit n als Hochzahl ergibt das die berühmte x-hoch-n-Formel:

#43: Wenn die Funktion

#44: $f(x) = c\cdot x^{n}$

#45: gegeben ist, dann ist die Ableitung davon die Funktion:

#46: $f'(x) = c\cdot n\cdot x^{n - 1}$

#47: -------------------------------